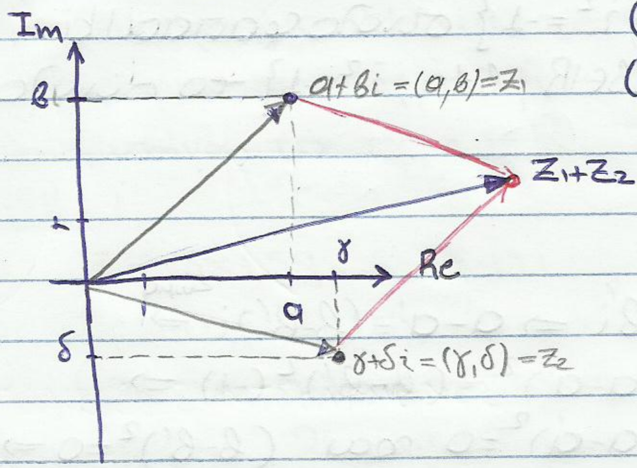
Μιγαδικοί στο Επίπεδο:

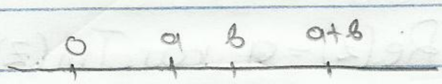
Πρόσθεση Μιγαδικών:



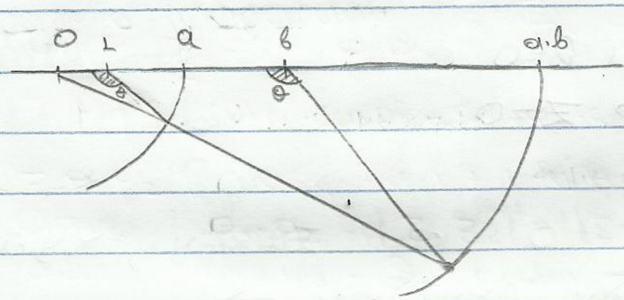
$$(a+bi)+(\gamma+\delta i)=(a+\gamma)+(b+\delta)i$$

$$(a+bi)\cdot(\gamma+\delta i)=(a\gamma-b\delta)+(a\delta+b\gamma)i$$

Στην πραγματική ευθεία:



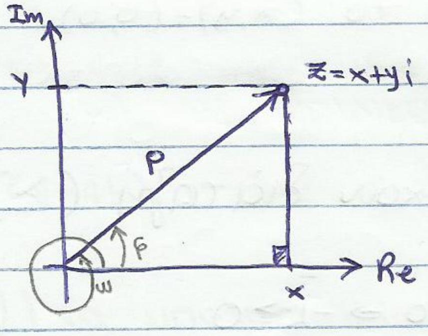
γεωμετρική ερμηνεία πρόσθεσης



γεωμετρική ερμηνεία γινομένου

(με χάρακα & διαβήτη)

ΜΕΤΡΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ:



$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}=|z|$$

Τώρα, το z απεικονίζεται στο $|z|$

Θυμόμαστε $N: x \longrightarrow N(x)$ στάθμη αν

1) $N(x)\geq 0$ & $N(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

2) $N(\lambda x)=|\lambda|\cdot N(x)$

3) $N(x+y)\leq N(x)+N(y)$

Στους μιγαδικούς η στάθμη μπορεί να οριστεί

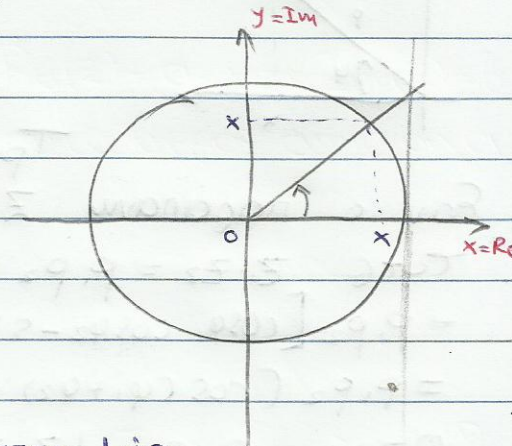
Αποδ.

1) $|z|=\sqrt{x^2+y^2}\geq 0$ και $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=0 \Leftrightarrow (x,y)=(0,0) \Leftrightarrow z=0$

2) $|\lambda z| = \sqrt{(\lambda x)^2+(\lambda y)^2} = \sqrt{\lambda^2(x^2+y^2)} = |\lambda|\cdot|z|$

3) $|z+w| = |x+yi+x'+y'i| = |x+x'+(y+y')i| = \sqrt{(x+x')^2+(y+y')^2} \leq$
$\leq \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x'^2+y'^2} \leq |z|+|w|$

ορίζομε ως $\varphi = arg(z)$ το όρισμα του z ,βασικό όρισμα είναι από όλες οι γωνίες (πχ στο σχημα φ, ω κλπ) που σχηματίζει ο μιγαδικος z με τον πραγματικο αξονα είναι εκείνη που μας πηγαινει απο τον άξονα x (Re) με τον συντομότερο τρόπο.
Απο τον ορισμό του $arg(z)$ προκύπτει ότι $\forall z \neq 0$:
$-\pi < Arg(z) \leq \pi$.



$$arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & y,x>0 \\ \pi+\arctan\left(\frac{y}{x}\right), & x<0, y>0 \\ -\pi+\arctan\left(\frac{y}{x}\right), & x,y<0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & x>0, y<0 \end{cases}$$

Άρα, η $1^η$ και η $4^η$ περίπτωση γίνονται μία
$arg(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, $y \neq 0$, $x>0$.

Στις ακραίες περιπτώσεις $\qquad arg(z)=Arg(z)+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

- αν $x=0$, $y>0 \Rightarrow arg(z)=\frac{\pi}{2}$
- αν $x=0$, $y<0 \Rightarrow arg(z)=-\frac{\pi}{2}$
- αν $y=0$, $x<0 \Rightarrow arg(z)=\pi$.

Εφαρμογή

$z=;$ για $Arg(1-z-z^2)=\frac{\pi}{2}$

Έστω $J = 1-z-z^2 = u+iv$, $u=0$ & $v>0$

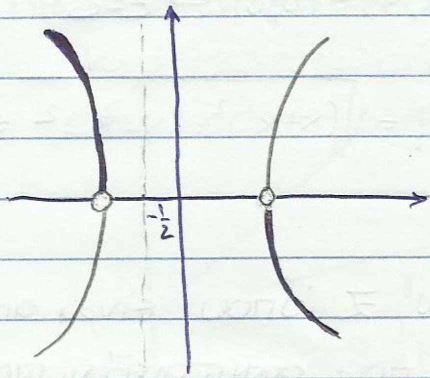
$z=x+yi$ τοτε $J = 1-(x+yi)-(x+yi)^2 = (\underbrace{1-x-x^2+y^2}_{u})+i(\underbrace{-y-2xy}_{v})$

Άρα, $1-x-x^2+y^2=0$ και $-y-2xy>0 \Rightarrow y(1+2x)<0$

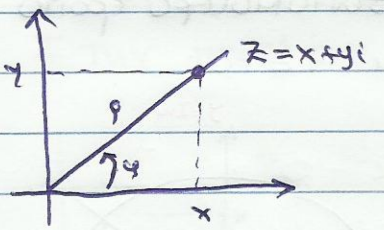
Έτσι, $x^2+x-y^2-1=0 \Rightarrow (x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}-y^2-1=0 \Rightarrow (x+\frac{1}{2})^2-y^2=\frac{5}{4}$

καθώς $y(1+2x)<0 \Rightarrow y<0$ και $1+2x>0$

$x>-\frac{1}{2}$



ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ



$y=\rho\cdot\sin\varphi$, $x=\rho\cdot\cos\varphi$

$z=x+yi=\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$

Τριγωνομετρική μορφή του z

Εάν ο παραπάνω $z=z_1$ και ας είναι $z_2=\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$

τότε $z_1\cdot z_2=\rho_1\rho_2(\cos\varphi_1+i\cdot\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$

$=\rho_1\rho_2[\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_2\cdot\cos\varphi_1)]$

$=\rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$, με $\varphi_1=\arg z_1$, $\varphi_2=\arg z_2$.

Όπου $\rho_1\cdot\rho_2=|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$

και $\varphi_1+\varphi_2=\theta$ είναι το όρισμα του z_1z_2

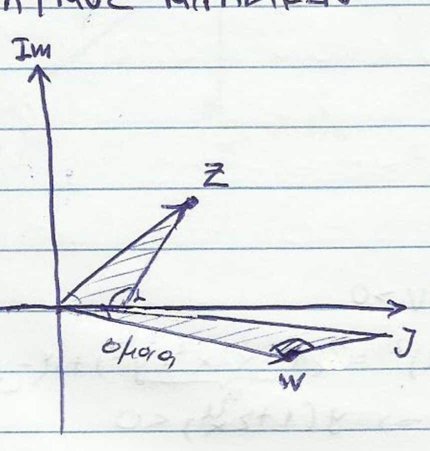
(δηλ. $\arg(z_1z_2)=\varphi_1+\varphi_2=\arg(z_1)+\arg(z_2)$)

Έτσι, $\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}(z_1)+\mathrm{Arg}(z_2)+2k\pi$, $k=0$ ή 1 ή -1

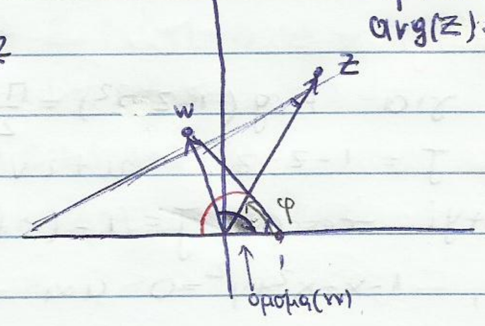
ΠΟΛ/ΜΟΣ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ

$w\cdot z=J \Leftrightarrow \frac{z}{1}=\frac{J}{w}$

πχ1



πχ2



Πρέπει το $\arg(z)+\varphi=\arg(w)$